La partie I *est indépendante des parties* II *et* III.
Les candidats peuvent utiliser du papier millimétrique.

PREMIÈRE PARTIE

Soit $(p_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de nombres réels positifs ou nuls tels que

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$

(ii) $p_0 + p_1 < 1$ et $p_0 > 0$

(iii) La série de terme général $p_k x^k$ a un rayon de convergence R strictement plus grand que 1.

On définit $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ pour $x \in [0, R[$.

1° Montrer que P est dérivable sur]0, R[et que sa dérivée P′ est une fonction strictement croissante sur]0, R[.

Montrer que l'équation $P(x) - x = 0$ a au plus deux racines.

2° On définit la suite de fonctions $(P_n)_{n \geqslant 1}$ sur [0, 1] par :

$P_1(x) = P(x)$

$P_n(x) = P[P_{n-1}(x)]$

a. **Vérifier que cette suite est bien définie.**

b. **Montrer que la suite numérique $P_n(0)$ converge vers un nombre σ compris entre 0 et 1 et que $P(\sigma) = \sigma$.**

c. Discuter le nombre de racines de l'équation $P(x) = x$ suivant le signe de $P'(1) - 1$, dans [0,1].

d. Quelle est la limite de la suite $P_n(0)$ dans chacun des cas étudiés en *c.* ?

DEUXIÈME PARTIE

PRÉLIMINAIRES.

Les vecteurs utilisés dans ce problème sont des éléments de $\mathbb{R}^2$. Un tel vecteur (x, x') sera représenté par une matrice colonne X : $X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$.

0 désignera ainsi le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et **1** le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On introduit les relations suivantes entre vecteurs :

$$\text{si} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$X \geqslant Y \Leftrightarrow x \geqslant y$ et $x' \geqslant y'$.

$X > Y \Leftrightarrow (x \geqslant y$ et $x' > y')$ ou $(x > y$ et $x' \geqslant y') \Leftrightarrow (X \geqslant Y$ et $X \neq Y)$

$X \gg Y \Leftrightarrow (x > y$ et $x' > y')$

Soit une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** si $X_{n+1} \geqslant X_n$.

Les matrices carrées utilisées dans ce problème sont des matrices (2×2) à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Une matrice carrée A est dite positive ou nulle si ses coefficients sont positifs ou nuls. Une matrice carrée A est dite strictement positive si ses coefficients sont strictement positifs.

Une matrice carrée A est dite quasi positive d'indice *k* si A est positive ou nulle et si A^k est strictement positive.

Une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices carrées ou de matrices colonnes est dite *convergente* vers la matrice U si chacun des coefficients de la matrice U_n converge dans $\mathbb{R}$ vers le coefficient correspondant de U.

Un vecteur U est **vecteur propre à gauche** de la matrice carrée M relativement à la valeur propre λ si ${}^tUM = \lambda {}^tU$, le symbole ^{t} désignant la transposition. Un vecteur V est **vecteur propre à droite** de la matrice carrée M relativement à la valeur propre λ si $MV = \lambda V$.

Dans toute cette partie, M désigne une matrice carrée positive ou nulle, M ≠ de 0.

1° Soient V_1 et V_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que $V_1 \leqslant V_2$, et W un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $W \geqslant 0$. Montrer que $MV_1 \leqslant MV_2$ et ${}^tWV_1 \leqslant {}^tWV_2$.

2° Montrer que λ_1 et λ_2, valeurs propres de M sont réelles. Montrer que $\lambda = \sup(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ est valeur propre de M.

3° On suppose M strictement positive.

a. Montrer que les valeurs absolues des valeurs propres de M sont distinctes, et que la valeur propre de plus grande valeur absolue (notée λ) est positive. On note μ la seconde valeur propre. Vérifier que $\lambda > |\mu|$.

.../...

E.N.S.E.T. Section B
1977
×35×

b. Montrer que l'on peut choisir U vecteur propre à gauche de M, associé à λ et V vecteur propre à droite de M, associé à λ, tels que :

$$U > 0, \quad V > 0 \quad \text{et} \quad {}^tUV = 1.$$

4° On suppose M quasi positive d'indice k.

a. Quelle relation existe-t-il entre les vecteurs propres à droite et à gauche de M et ceux de M^k ?

b. Montrer que les valeurs absolues des valeurs propres de M sont distinctes. On note λ la valeur propre de plus grande valeur absolue, μ la seconde valeur propre. Vérifier que $\lambda > |\mu|$.

c. Montrer que l'on peut choisir U vecteur propre à gauche de M, associé à λ et V vecteur propre à droite de M, associé à λ, tels que

$$U > 0, \quad V > 0 \quad \text{et} \quad {}^tUV = 1.$$

d. Soit M_1 la matrice carrée définie par $M_1 = V\,{}^tU$, et soit M_2 la matrice carrée définie par $M = \lambda (M_1 + M_2)$.

Vérifier que $M_1^2 = M_1$ et que $M_1 M_2 = 0$.

Montrer que $M^j = \lambda^j (M_1 - M_2^j)$.

TROISIÈME PARTIE

Notations.

On se donne une famille de nombres réels positifs ou nuls $\{p_{i,j}\}_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}}$ vérifiant $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} p_{i,j} = 1$ et une famille de nombres réels positifs ou nuls $\{q_{i,j}\}_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}}$ tels que $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} q_{i,j} = 1$.

On définit f et g fonctions de deux variables réelles par :

$$f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} x^i \left[\sum_{j=0}^{n} p_{i,j} y^j \right]$$

$$g(x,y) = \sum_{i=0}^{n} x^i \left[\sum_{j=0}^{n} q_{i,j} y^j \right]$$

On note Φ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au vecteur X de composantes (x, y) fait correspondre le vecteur $\Phi(X)$ de composantes $(f(x, y), g(x, y))$.

On note M la matrice carrée définie par :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(1,1) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) \end{bmatrix}$$

Vérifier que M est une matrice positive ou nulle.

Dans toute cette partie, on suppose M quasi positive d'indice k, λ est la valeur propre de M de plus grande valeur absolue, U et V sont les vecteurs propres de M associés à λ définis en II. 4° *c*.

On conserve les notations introduites dans les préliminaires de la partie II.

1° On définit les itérées de Φ par :

$$\begin{cases} \Phi_1(X) = \Phi(X) & \text{et} \\ \Phi_{j+1}(X) = \Phi(\Phi_j(X)) & \text{pour} \quad 0 \leqslant X \leqslant 1. \end{cases}$$

a. Montrer que la suite $\Phi_j(0)$ est bien définie. Montrer qu'elle est croissante et convergente.

b. Vérifier que la limite de la suite $\Phi_j(0)$ est un vecteur Γ de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Phi(\Gamma) = \Gamma$ et $0 \leqslant \Gamma \leqslant 1$.

2° On pose $\forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

$$F(x,y) = f(x,y) - 1 - \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1).$$

a. On considère la fonction F_y définie pour $y \in [0, 1]$ par

$$F_y : x \to f(x,y) - 1 - \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)$$

pour tout $x \in [0, 1]$.

En étudiant la dérivée de cette fonction, montrer que

$$F_y(x) \geqslant F_y(1).$$

En étudiant ensuite la fonction $y \to F_y(1)$ pour $y \in [0, 1]$ montrer que

$$F(x,y) \geqslant 0 \qquad \forall x \in [0,1], \ \forall y \in [0,1].$$

b. Montrer que s'il existe $(x_0, y_0) \in [0, 1[\times [0, 1[$ tel que $F(x_0, y_0) = 0$, alors : $\forall x \in [x_0, 1], \forall y \in [y_0, 1] \quad F(x, y) = 0.$

.../...

En déduire qu'alors

$$F(x, y) = \mathbf{0} \qquad \forall x \in [0, 1], \ \forall y \in [0, 1].$$

c. Montrer que s'il existe $x_0 \in [0, 1[$ tel que $F(x_0, 1) = 0$, alors $F(x, 1) = 0 \ \forall x \in [0, 1]$. Vérifier que, dans ce cas $p_{i,j} = 0 \ \forall i \geqslant 2$.

3° *a.* Déduire de la question 2° *a.* que

$$\Phi(X) \geqslant \mathbf{1} + M(X - \mathbf{1})$$

Vérifier que $\mathbf{1} - \Gamma \leqslant M^j(\mathbf{1} - \Gamma)$ pour tout entier $j \geqslant 1$. [On rappelle que Γ vérifie $\Gamma = \Phi(\Gamma)$] et que ${}^tU(\mathbf{1} - \Gamma) \leqslant \lambda^j {}^tU(\mathbf{1} - \Gamma)$. [On utilisera II. 1°.]

b. Déduire de la question 2° *b.* que s'il existe X_0 vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{0} \leqslant X_0 \ll \mathbf{1}$ et $\Phi(X_0) = \mathbf{1} + M(X_0 - \mathbf{1})$ alors

$\Phi(X) = \mathbf{1} + M(X - \mathbf{1})$ pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{0} \leqslant X \leqslant \mathbf{1}$.

Vérifier que l'on a alors $M\mathbf{1} \leqslant \mathbf{1}$ et que si $M\mathbf{1} < \mathbf{1}$, on a $\lambda {}^tU\mathbf{1} < {}^tU\mathbf{1}$.

4° On suppose dans cette question $\lambda < 1$.

Montrer, en utilisant 3° *a.* que le seul vecteur Γ de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Gamma = \Phi(\Gamma)$ et $\mathbf{0} \leqslant \Gamma \leqslant \mathbf{1}$ est le vecteur $\Gamma = \mathbf{1}$. Quelle est dans ce cas, la limite de la suite $\Phi_j(\mathbf{0})$?

5° On suppose dans cette question que $\lambda = 1$ et qu'il n'existe pas de matrice carrée A telle que $\Phi(X) = AX$ pour tout X vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{0} \leqslant X \leqslant \mathbf{1}$.

a. Montrer, en utilisant la question 3° *b.* qu'il n'existe pas de vecteurs X_0 $\mathbf{0} \leqslant X_0 \ll \mathbf{1}$ tel que $\Phi(X_0) = \mathbf{1} - M(X_0 - \mathbf{1})$. [On montrera que l'égalité $M\mathbf{1} = \mathbf{1}$ n'est pas compatible avec les hypothèses.]

b. Montrer que si $\Phi(X) > \mathbf{1} + M(X - \mathbf{1})$ pour tout X tel que $\mathbf{0} \leqslant X \ll \mathbf{1}$, Γ a au moins une de ses composantes égale à 1 (on montrera que ${}^tU(\mathbf{1} - \Gamma) < {}^tU(\mathbf{1} - \Gamma)$ pour obtenir une contradiction).

c. Montrer que si $\Phi(\Gamma) > \mathbf{1} + M(\Gamma - \mathbf{1})$, alors $\Gamma = \mathbf{1}$.

d. On suppose $\Gamma = (\gamma, 1)$ où $0 \leqslant \gamma < 1$.

Montrer, en utilisant la question 2° *c.* que si $\Phi(\Gamma) = \mathbf{1} + M(\Gamma - \mathbf{1})$, alors pour tout $X = (x, 1)$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $\Phi(X) = \mathbf{1} + M(X - \mathbf{1})$.

Montrer, en étudiant l'égalité $\Phi(\Gamma) = \Gamma$ que l'on a alors :

$$f(x, y) = x \sum_{j=0}^{n} p_{1,j} y^j \qquad \text{avec} \qquad \sum_{j=0}^{n} p_{1,j} = 1$$

$$g(x, y) = \sum_{j=0}^{n} q_{0,j} y^j \qquad \text{avec} \qquad \sum_{j=0}^{n} q_{0,j} = 1$$

Quelle est la forme de la matrice M? Quelles sont les valeurs propres de M? M est-elle quasi positive?

e. Montrer que $\Phi_j(\mathbf{0})$ converge vers le vecteur $\mathbf{1}$.

6° Dans cette question, on suppose $\lambda > 1$.

X étant un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de composantes (x, y), on pose

$$\|X\| = \sup(|x|, |y|).$$

On admettra que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \exists \eta(j, \varepsilon)$$

tel que

$$\|X\| < \eta(j, \varepsilon) \Rightarrow \|\Phi_j(\mathbf{1} - X) - \mathbf{1} + M^j X\| \leqslant \varepsilon \|X\|.$$

On utilisera la décomposition $M = \lambda(M_1 + M_2)$ étudiée en II 4° *d.* et on admettra que $M_2^j \to 0$ quand $j \to \infty$.

a. Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $X > \mathbf{0}$. Montrer que $M_1 X \gg \mathbf{0}$.

Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $\|X\| = 1$ on ait $\|MX\| \geqslant \alpha \|X\|$.

b. Vérifier que l'on peut choisir n tel que

$$\forall X > \mathbf{0} \qquad \|M^n X\| \geqslant 2\|X\|.$$

Vérifier que si $\|X\| < \eta(j, \varepsilon)$ avec $\varepsilon < 1$, alors

$$\|\mathbf{1} - \Phi_n(\mathbf{1} - X)\| > \|X\|.$$

c. On suppose $\Gamma = \lim_{j \to \infty} \Phi_j(\mathbf{0}) = \mathbf{1}$.

Montrer que $\|\mathbf{1} - \Phi_{n+j}(\mathbf{0})\| > \|\mathbf{1} - \Phi_j(\mathbf{0})\|$; vérifier que cette inégalité est en contradiction avec la croissance de $\Phi_j(\mathbf{0})$.

d. Montrer que $\lim_{j \to \infty} \Phi_j(\mathbf{0}) < \mathbf{1}$.

FIN

×37×

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail